

具有符号式位置正解且运动解耦的新型2T1R并联机构的拓扑设计与分析

郭跃 李菊 沈惠平

(常州大学 现代机构学研究中心, 常州 213164)

摘要:【目的】两平移一转动(2T1R)并联机构因结构简单、成本低廉, 展现出良好的工程应用潜力, 但当前新型2T1R机构构型研发相对滞后, 与1T2R机构的研究热度形成鲜明对比。为填补2T1R并联机构研究空白, 基于方位特征(Position and Orientation Characteristic, POC)集理论, 设计了一种纯低副构造的2T1R并联机构, 以满足工程应用对机构性能的多样化需求。【方法】首先, 运用拓扑分析方法系统地解析了机构拓扑结构, 提炼关键拓扑特征; 然后, 基于拓扑特征构建了运动学模型, 获得了机构符号式位置正、反解, 并进一步求解了动平台速度与加速度; 在此基础上, 通过理论分析确定机构工作空间几何参数与奇异位形; 借助动力学建模方法, 求解了机构驱动力变化规律; 最后, 结合实际应用场景完成机构概念设计。【结果】研究表明, 该纯低副2T1R并联机构不仅具备符号式位置正解特性, 还可实现部分运动解耦, 动力学性能优异。同时, 其低成本、大操作空间的优势显著, 为后续机构优化设计与工程化应用提供了参考与实践指导。

关键词: 并联机构; 拓扑分析; 工作空间; 动力学

中图分类号: TH112 **DOI:** 10.16578/j.issn.1004.2539.2025.09.005

0 引言

在具有结构简单、造价低等特点的少自由度并联机构中, 可实现两个方向的平移(2T)和一个方向的旋转(1R)的3自由度2T1R并联机构, 一直受到学者的广泛关注^[1-2]。但相较于其他3自由度1T2R并联机构, 2T1R并联机构的新机型要少得多。前者通过改变UP、PU、RPR支链在运动副的种类、位置顺序, 或调整支链的顺序, 易设计出改进的衍生机构, 创新性较小^[3-6]; 后者则可通过构造含2T1R运动元素的混合支链来设计新的机构, 显然, 其难度较大, 但创新性好。

在实际应用中, 1T2R机构主要用于制造加工, 因其含较少运动副的特点, 从制造角度上被视为成功的。而2T1R机构除了可用于机械加工外, 还能利用动平台姿态的变化进行工位更换、物料分类等操作, 因此, 在应用上具有较多的优势。

近年来, 一些国内外学者提出对2T1R并联机构的创新方案。LI等^[7]提出一种新型2T1R并联机构, 将其开发为烹饪机器人的原型。XIE等^[8]提出一种基于数学几何方法的2T1R并联机构型综合方法, 优选

更加解耦的并联机构后, 将其作为五轴混合机床的并联模块。NI等^[9]提出一种具有整圈旋转能力、扩大工作空间的新型2T1R并联机构。XU等^[10]研究了两连续旋转轴2R1T并联机构的运动解耦原理, 提出区分两个旋转自由度是否部分耦合的标准。林浩等^[11]综合比较多个2T1R机构, 优选出一种用于农业育秧的铺盘调节机构。

本文提出一种纯低副构造的2T1R并联机构, 其具有符号式位置正解和部分运动解耦^[12]的特点; 并采用基于方位特征集的并联机构拓扑学、基于拓扑特征的运动学建模法^[13]和虚功原理的序单开链法^[14-18], 分析揭示了该机构良好的拓扑学、运动学与动力学性能。

1 并联机构拓扑设计及分析基础

1.1 拓扑设计理论

1.1.1 POC方程

串联、并联机构的方位特征(Position and Orientation Characteristic, POC)集的计算式为

$$M_{bi} = \bigcup_{u=1}^m M_{Ju} \quad (1)$$

收稿日期: 2024-05-13

基金项目: 常州智能制造龙城实验室项目(CJ20242061); 国家自然科学基金项目(523755062)

作者简介: 郭跃, 男, 2000年生, 江苏徐州人, 硕士研究生; 主要研究方向为机器人机构学; 18811975100@163.com。

李菊(通信作者), 女, 1981年生, 江苏无锡人, 博士, 副教授; 主要研究方向为机器人机构设计和自动控制; wangju0209@163.com。

引用格式: 郭跃, 李菊, 沈惠平. 具有符号式位置正解且运动解耦的新型2T1R并联机构的拓扑设计与分析[J]. 机械传动, 2025, 49(9): 38-46.

GUO Yue, LI Ju, SHEN Huiping. Topological design and analysis of a novel 2T1R parallel mechanism with symbolic position solutions and motion decoupling[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2025, 49(9): 38-46.

$$M_{pa} = \bigcap_{i=1}^n M_{bi} \quad (2)$$

式中, M_{bi} 为第 i 条支链末端的 POC 集; m 为运动副数; M_{ju} 为第 u 个运动副的 POC 集; n 为支链条数; M_{pa} 为机构动平台的 POC 集。

1.1.2 自由度计算

基于最短回路(S-Loop)的一般过约束和无过约束的并联机构的非瞬时自由度计算式^{[19]40-52}为

$$F = \sum_{j=1}^v F_j = F_1 + F_2 + \dots + F_v \quad (3)$$

$$F_j = \sum f_j - \xi_{lj} \quad (4)$$

$$\xi_{lj} = \dim. \{ (\bigcap_{i=1}^j M_{bi}) \cup M_{b(j+1)} \} \quad (5)$$

式中, F 、 F_j 分别为机构、第 j 个回路的自由度; v 为独立回路数, $v = m + n - 1$; f_j 为第 j 个回路中新添加支链(首次参与计算)的运动副自由度(不含局部自由度); ξ_{lj} 为第 j 个回路的独立位移方程数。

1.1.3 耦合度 κ 计算

由基于序单开链的机构组成原理知

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m_j} f_i - I_j = \begin{cases} \Delta_j^- = -5, -4, -3, -2, -1 \\ \Delta_j^0 = 0 \\ \Delta_j^+ = +1, +2, +3 \end{cases} \quad (6)$$

式中, Δ_j 为约束度; m_j 为第 j 个单开链(Single Open Chain, SOC)的运动副数量; I_j 为第 j 个单开链的驱动副数量。

由一组有序的 SOC(约束度之和为 0) 组成的最小子运动链(Smallest Kinetic Chain, SKC)的耦合度为

$$\kappa = \frac{1}{2} \min \left(\sum_{j=1}^v |\Delta_j| \right) \quad (7)$$

1.2 拓扑机构设计

本文设计的 3-DOF 2T1R 纯低副的并联机构, 由混合支链 I、简单支链 II、静平台 0、动平台 1 组成, 如图 1 所示。

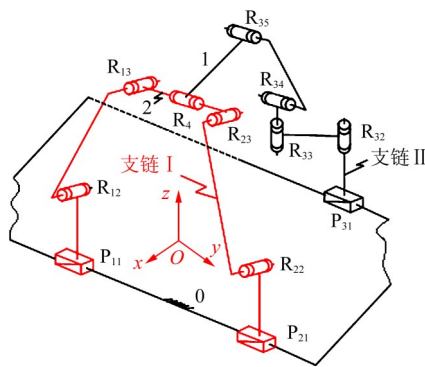


图1 3自由度2T1R并联机构
Fig. 1 3-DOF 2T1R parallel mechanism

图 1 中, 混合支链 I 的结构如下: 由两条结构相同的子链 $\{-P_{11} \perp R_{12} // R_{13} // R_{23} // R_{22} \perp P_{21} -\}$, 其移动副 P_{11} 、 P_{21} 位于静平台 0 同一侧直线导轨上; 进一步, 在其输出杆 2 上再串联一个转动副 R_4 , 其轴线与输出杆 2 轴线重合, 并用转动副 R_4 连接动平台 1 的一端。

简单支链 II 由两组平行轴线的转动副组 $R_{32} // R_{33}$ 与 $R_{34} // R_{35}$ 垂直串联 ($R_{33} \perp R_{34}$) 后, 再串联 1 个移动副 (P_{31}) 且 $P_{31} \perp R_{32}$, 即 $\{-P_{31} \perp R_{32} // R_{33} \perp R_{34} // R_{35} -\}$, 其末端 R_{35} 与动平台 1 另一端相连, 其移动副 P_{31} 位于静平台 0 另一侧直线导轨上, 且 $P_{31} // P_{11} \perp P_{21}$ 。

其中, 符号 $//$ 、 \perp 、 $|$ 分别表示平行、垂直、重合共线, 下同。

1.3 拓扑分析与计算

1.3.1 POC 集

在拓扑分析中, 合理选择基点可有效减少机构 POC 中的非独立元素数量。对于该机构, 选取转动副 R_4 轴线上一点为基点, 则混合支链 I 和简单支链 II 的 POC 集由式(1)分别计算如下。其中, t 表示平移; r 表示转动; \diamond 表示所在平面。

1) 混合支链 I 的 POC 集为

$$M_{HSOC I} = \left[\begin{matrix} t^2(\perp R_{23}) \\ r^1(// R_{23}) \end{matrix} \right] \cup \left[\begin{matrix} t^0 \\ r^1(// R_4) \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} t^2(\perp R_{23}) \\ r^2[// \diamond (R_{23}, R_4)] \end{matrix} \right]$$

2) 简单支链 II 的 POC 集为

$$M_{b2} = \left[\begin{matrix} t^3 \\ r^2[// \diamond (R_{33}, R_{34})] \end{matrix} \right]$$

因此, 动平台 1 的 POC 集由式(2)计算为

$$M_{pa} = M_{HSOC I} \cap M_{b2} = \left[\begin{matrix} t^2(\perp R_{23}) \\ r^2[// \diamond (R_{23}, R_4)] \end{matrix} \right] \cap \left[\begin{matrix} t^3 \\ r^2[// \diamond (R_{33}, R_{34})] \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} t^2(\perp R_{23}) \\ r^1(// R_4) \end{matrix} \right]$$

1.3.2 自由度计算

根据并联机构自由度计算方法中的最优路径选取原则, 第 1 回路选择混合支链 I 中的平面六杆子并联机构, 第 2 回路由第 1 回路及其输出杆 2 上转动副 R_4 和简单支链 II 组成, 即

1) $Loop_1: \{-P_{11} \perp R_{12} // R_{13} // R_{23} // R_{22} \perp P_{21} -\}$ 。易知, 其独立位移方程数 $\xi_{L1} = 3$ 。

其自由度由式(4)得

$$F_1 = \sum f_j - \xi_{L1} = 6 - 3 = 3$$

2) $Loop_2: \{-R_4 // R_{35} // R_{34} \perp R_{33} // R_{32} \perp P_{31} -\}$ 。其独立

位移方程数由式(5)得

$$\xi_{12} = \dim \left\{ \left[\begin{array}{c} t^2(\perp R_{23}) \\ r^2[// \diamond (R_{23}, R_4)] \end{array} \right] \cup \left[\begin{array}{c} t^3 \\ r^2[// \diamond (R_{33}, R_{34})] \end{array} \right] \right\} = 6$$

其自由度由式(4)得

$$F_2 = \sum f_j - \xi_{12} = 6 - 6 = 0$$

由式(3)得, 该机构自由度为

$$F = \sum F_j = 3 + 0 = 3$$

1.3.3 耦合度计算

由式(6)得, 2个回路的约束度分别为

$$\begin{cases} \Delta_1 = F_1 - I_1 = 3 - 2 = 1 \\ \Delta_2 = F_2 - I_2 = 0 - 1 = -1 \end{cases}$$

根据SKC判定准则, 该机构包含1个SKC, 其耦合度由式(7)得

$$\kappa = \frac{1}{2} \min \left\{ \sum_{j=1}^v \Delta_j \right\} = 1$$

2 机构位置分析

2.1 坐标系的建立及参数标记

该机构的运动学建模如图2所示。设静平台0为正方形, 其上3个移动副 P_{11} 、 P_{21} 、 P_{31} 分别位于 A_1 、 A_2 、 A_3 处; 以静平台0的几何中心点 O 为原点, 建立笛卡儿静坐标系 $O-xyz$, x 轴垂直于 A_1A_2 的连线, y 轴平行于 A_1A_2 的连线。动坐标系 $O'-x'y'z'$ 原点位于动平台1上 D_1 点, y' 轴与 C_1C_2 连线相重合, x' 轴过 D_1 点且与 y' 轴垂直, x' 轴与直线 D_1E_1 之间的夹角为 α 。而 z 、 z' 轴方向均由右手定则确定。

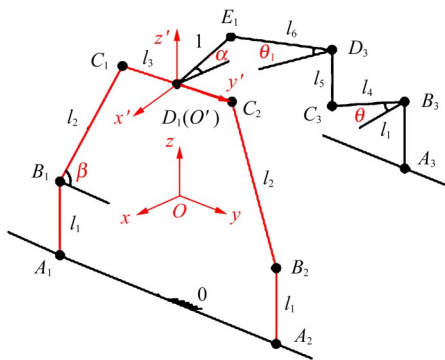


图2 2T1R机构的运动学建模

Fig. 2 Kinematic modeling of the 2T1R mechanism

设置机构的尺寸参数: 静平台两导轨之间距离为 $2a$, $\overline{D_1E_1}=2b$, $\overline{A_iB_i}=l_1$ ($i=1, 2, 3$), $\overline{B_jC_j}=l_2$ ($j=1, 2$), $\overline{C_1C_2}=l_3$, $\overline{B_3C_3}=l_4$, $\overline{C_3D_3}=l_5$, $\overline{D_3E_1}=l_6$ 。

记 B_1C_1 与 y 轴的夹角为 β , B_3C_3 与 x 轴的夹角为

θ , D_3E_1 与 x 轴的夹角为 θ_1 , 3个移动副 P_{11} 、 P_{21} 、 P_{31} 的位移量分别为 y_1 、 y_2 、 y_3 。

2.2 位置正解分析

静坐标系中, 点 A_i 、 B_i ($i=1, 2, 3$) 的坐标分别为

$$\begin{aligned} A_1 &= (a, y_1, 0); A_2 = (a, y_2, 0); A_3 = (-a, y_3, 0); \\ B_1 &= (a, y_1, l_1); B_2 = (a, y_2, l_1); B_3 = (-a, y_3, l_1)。 \end{aligned}$$

位置正解问题为: 已知3个位移量 y_1 、 y_2 、 y_3 , 求解动平台1上 O' 点的坐标及其姿态角 α 。

机构的位置正解可分别在 $Loop_1$ 和 $Loop_2$ 中进行求解。

1) $Loop_1$ 中的位置正解

在 $Loop_1$ 中, 易知

$$\begin{aligned} C_1 &= (a, y_1 + l_2 \cos \beta, l_1 + l_2 \sin \beta); \\ D_1 &= (a, y_1 + l_2 \cos \beta + l_3/2, l_1 + l_2 \sin \beta); \\ C_2 &= (a, y_1 + l_2 \cos \beta + l_3, l_1 + l_2 \sin \beta)。 \end{aligned}$$

由杆长约束条件 $\overline{B_2C_2}=l_2$, 建立位置方程, 可得

$$\beta = \arccos \frac{y_2 - y_1 - l_3}{2l_2} \quad (8)$$

2) $Loop_2$ 中的位置正解

在 $Loop_2$ 中, 易知

$$\begin{aligned} C_3 &= (l_4 \cos \theta - a, y_3 - l_4 \sin \theta, l_1); \\ D_3 &= (l_4 \cos \theta - a, y_3 - l_4 \sin \theta, l_1 + l_5); \\ E_1 &= (a - 2b \cos \alpha, y_1 + l_2 \cos \beta + l_3/2, l_1 + l_2 \sin \beta + 2b \sin \alpha)。 \end{aligned}$$

由机构的拓扑约束关系可知, E_1 和 D_3 的 y 方向的坐标值相等, 即有 $y_{E_1}=y_{D_3}$, 结合式(8), 可解出

$$\theta = \arcsin \frac{y_3 - y_1 - l_3/2 - l_2 \cos \beta}{l_4} \quad (9)$$

根据 $\overline{D_3E_1}$ 杆长条件, 可得

$$\alpha = 2 \arctan \frac{A \pm \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{B - C} \quad (10)$$

式中, $A = -4b(l_5 - l_2 \sin \beta)$; $B = 4b(l_4 \cos \theta - 2a)$; $C = (l_5 - l_2 \sin \beta)^2 + (l_4 \cos \theta - 2a)^2 + 4b^2 - l_6^2$ 。

至此, 动平台1的 O' (x' , y' , z') 及姿态角 α 已全部求出, 即

$$\begin{cases} x' = a \\ y' = y_1 + \frac{l_3}{2} + l_2 \cos \beta \\ z' = l_1 + l_2 \sin \beta \\ \alpha = 2 \arctan \frac{A - \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{B - C} \end{cases} \quad (11)$$

2.3 位置反解分析

位置反解问题为: 已知动平台1上 O' 点的坐标及其姿态角 α , 求解3个输入位移量 y_1 、 y_2 、 y_3 。

根据拓扑分析和杆长约束 $\overline{D_3E_1}=l_6$ 、 $\overline{B_1C_1}=\overline{B_2C_2}=l_2$, 较易求解出 y_1 、 y_2 和 y_3 , 故求解过程不再赘述, 即

$$\begin{cases} y_1 = y' - \frac{l_3}{2} \pm \sqrt{l_2^2 - (z' - l_1)^2} \\ y_2 = y' + \frac{l_3}{2} \pm \sqrt{l_2^2 - (z' - l_1)^2} \\ y_3 = y' \pm \sqrt{l_4^2 - (x' - 2b \cos \alpha - l_6 \cos \theta_1 + a)^2} \end{cases} \quad (12)$$

其中, $\theta_1 = \arcsin \frac{z' + 2b \sin \alpha - l_1 - l_5}{l_6}$ 。

2.4 位置正反解试验算例

设并联机构的参数: $a=250$ mm; $b=120$ mm; $l_1=90$ mm; $l_2=180$ mm; $l_3=280$ mm; $l_4=140$ mm; $l_5=70$ mm; $l_6=180$ mm。

根据上述杆长, 应用 SolidWorks 软件进行三维建模, 设置 3 个移动副的初始值分别为: $y_1=-209.44$ mm; $y_2=143.75$ mm; $y_3=34.17$ mm; O' 的坐标为(250, -32.85, 266.24) mm。

根据式(8)~式(10), 采用 Matlab 软件编程, 求得动平台 O' 坐标为(250, -32.85, 266.24) mm。

又由上述动平台 1 上点 O' 坐标, 求得 6 组移动副的移动量, 如表 1 所示。

表 1 位置反解数值

Tab. 1 Numerical values of inverse position solutions

序号	y_1/mm	y_2/mm	y_3/mm
1	-136.251 3	143.748 7	34.166 2
2	-209.448 7	70.551 3	34.166 2
3*	-209.448 7	143.748 7	34.166 2
4	-209.448 7	70.551 3	-99.866 2
5	-136.251 3	143.748 7	-99.866 2
6	-136.251 3	70.551 3	-99.866 2

显然, 表 1 中第 3* 组的逆解数值与位置正解所给定的 3 个移动副的初始位置保持一致。

进一步, 图 3 所示为机构位姿曲线。利用 SolidWorks 软件得到的动平台位姿仿真曲线也与理论曲线一致, 从而验证了位置正、逆解的正确性。

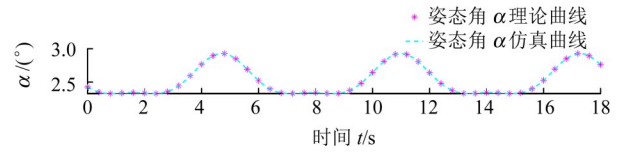
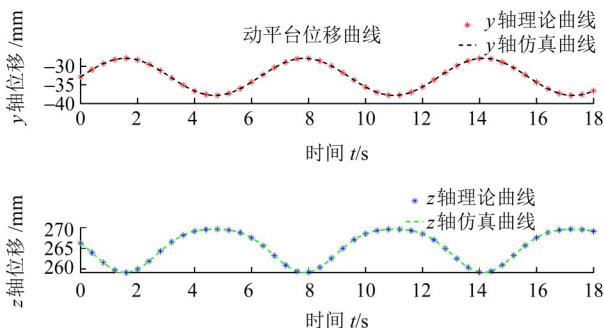


图 3 机构位姿曲线

Fig. 3 Posture curves of the mechanism

3 机构速度、奇异性及工作空间分析

3.1 机构速度、加速度模型

3.1.1 动平台 1 上 O' 点的速度映射模型

位置反解的位置方程式(12)可整理成

$$\begin{cases} f_1: y_1 - y' + \frac{l_3}{2} + \sqrt{l_2^2 - (z' - l_1)^2} = 0 \\ f_2: y_2 - y' - \frac{l_3}{2} - \sqrt{l_2^2 - (z' - l_1)^2} = 0 \\ f_3: y_3 - y' - \sqrt{l_4^2 - (x' - 2b \cos \alpha - l_6 \cos \theta_1 + a)^2} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

对式(13)进行全微分, 可得

$$J_0 \dot{\omega} = J_i \dot{\rho} \quad (14)$$

式中, J_0 为正向运动学雅可比矩阵; J_i 为逆向运动学雅可比矩阵。

其中, $\dot{\omega} = [\dot{y}, \dot{z}, \dot{\alpha}]^T$; $\dot{\rho} = [\dot{y}_1, \dot{y}_2, \dot{y}_3]^T$; $J_0 =$

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}; J_i = - \begin{bmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ 0 & u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix};$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = f_{11} = -1; \frac{\partial f_1}{\partial z} = f_{12} = -\frac{z' - l_1}{\sqrt{l_2^2 - (z' - l_1)^2}};$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \alpha} = f_{13} = 0; \frac{\partial f_2}{\partial y} = f_{21} = -1; \frac{\partial f_2}{\partial z} = f_{22} = \frac{z' - l_1}{\sqrt{l_2^2 - (z' - l_1)^2}};$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \alpha} = f_{23} = 0; \frac{\partial f_3}{\partial y} = f_{31} = -1;$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial z} = f_{32} = [l_6 \sin \theta_1 (x' - 2b \cos \alpha - l_6 \cos \theta_1 + a)] / \{ [l_4^2 - (x' - 2b \cos \alpha - l_6 \cos \theta_1 + a)^2] [l_6^2 - (z' + 2b \sin \alpha - l_1 - l_5)^2] \}^{\frac{1}{2}};$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial \alpha} = f_{33} = \frac{2b(x' - 2b \cos \alpha - l_6 \cos \theta_1 + a)}{\sqrt{l_4^2 - (x' - 2b \cos \alpha - l_6 \cos \theta_1 + a)^2}} \times \left[\sin \alpha + \frac{l_6 \sin \theta_1 \cos \alpha}{\sqrt{l_6^2 - (z' + 2b \sin \alpha - l_1 - l_5)^2}} \right];$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = u_{11} = 1; \frac{\partial f_2}{\partial y_2} = u_{22} = 1; \frac{\partial f_3}{\partial y_3} = u_{33} = 1.$$

当机构不处于奇异位形时, J_0 可逆, 则

$$\dot{\omega} = J_0^{-1} J_i \dot{\rho} \quad (15)$$

3.1.2 动平台 1 上 O' 点的加速度映射模型

将式(15)两边对时间 t 求导, 当机构不处于奇异

位形时 J_0 可逆, 整理得

$$\ddot{\omega} = J_0^{-1} J_i \ddot{\rho} - J_0^{-1} K_0 \quad (16)$$

式中, $K_0 = [K_1 \ K_2 \ K_3]^T$; $K_1 = \dot{f}_{11}\dot{y} + \dot{f}_{12}\dot{z} + \dot{f}_{13}\dot{\alpha} + \dot{u}_{11}\dot{y}_1$; $K_2 = \dot{f}_{21}\dot{y} + \dot{f}_{22}\dot{z} + \dot{f}_{23}\dot{\alpha} + \dot{u}_{22}\dot{y}_2$; $K_3 = \dot{f}_{31}\dot{y} + \dot{f}_{32}\dot{z} + \dot{f}_{33}\dot{\alpha} + \dot{u}_{33}\dot{y}_3$ 。

3.1.3 机构速度、加速度模型仿真验证

在 SolidWorks 运动仿真中给定 3 个移动副的起始位置和移动规律, $[y_1, y_2, y_3] = [-20\sin t - 209.44, 30\sin t + 143.74, 15\sin t + 34.16]$, 通过运动学仿真得到机构的速度和加速度仿真曲线。再通过 Matlab 软件对速度计算式(15)和加速度计算式(16)进行编程, 可得到动平台 1 上基点 O' 的速度和加速度的理论计算曲线(实心圆), 分别如图 4(a)、图 4(b)所示。

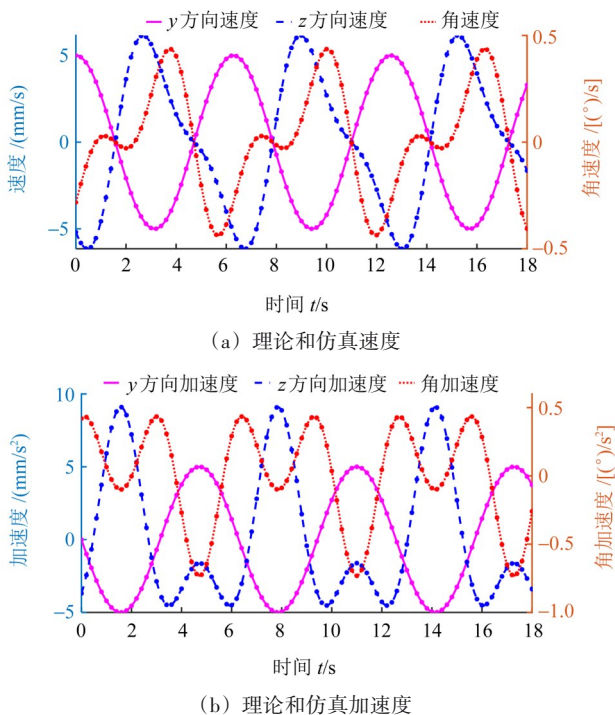


图 4 机构速度与加速度分析

Fig. 4 Velocity and acceleration analysis of the mechanism

由图 4 可知:

1) 机构理论计算与模型仿真所得到的速度曲线和加速度曲线基本一致。由此表明, 该机构运动学建模及其计算式推导正确。

2) 动平台速度、加速度曲线变化平缓, 没有突变发生。这说明在设定运动范围内机构运动学性能良好。

3.2 机构奇异分析

机构奇异可分为输入奇异、输出奇异和综合奇异 3 类。

1) 输入奇异

由于式(15)中 J_i 为单位矩阵, 故该机构不会有

输入奇异位置。

2) 输出奇异

该机构发生输出奇异时, 式(15)中 J_0 的秩小于 3, 此时 $f_{12}=0$ 或 $f_{33}=0$ 。

当 $f_{12}=0$ 时, C_1C_2 杆与 A_1B_1 杆等高, 如图 5(a) 所示(静平台标蓝, 动平台标红, 驱动副标绿)。

当 $f_{33}=0$ 时, B_3C_3 杆平行于 C_1C_2 杆, 如图 5(b) 所示。

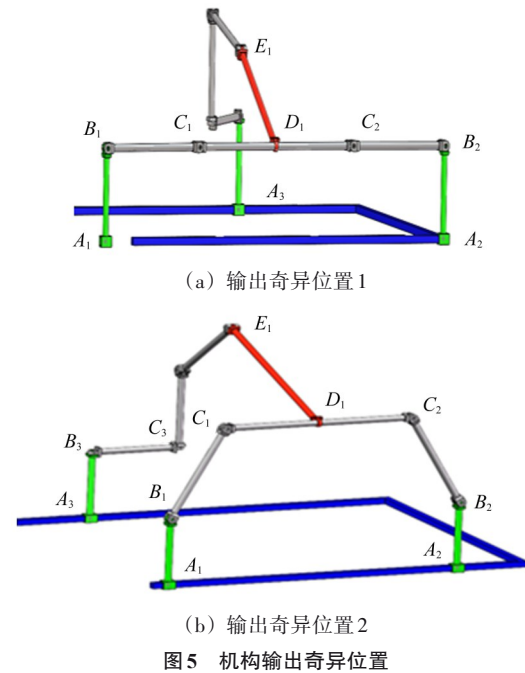


图 5 机构输出奇异位置

Fig. 5 Output singular positions of the mechanism

3) 综合奇异

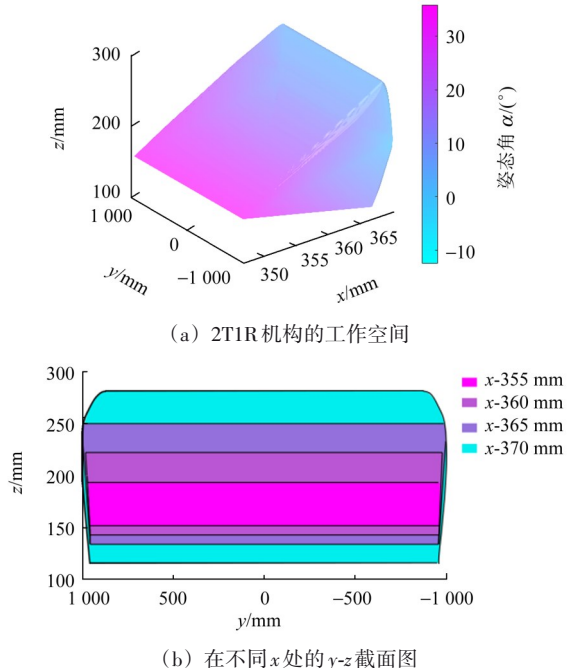
易知, 该机构无综合奇异位置。

3.3 工作空间分析

本文第 2.2 节已求出该机构的符号式位置正解表达式, 故采用位置正解计算该机构动平台质心的工作空间。在考虑机构杆件干涉、运动副转角约束的前提下, 初步设定 3 个驱动副的工作范围: $-1\ 000\text{ mm} \leq y_1 \leq 1\ 000\text{ mm}$ 、 $-1\ 000\text{ mm} \leq y_2 \leq 1\ 000\text{ mm}$ 、 $-1\ 000\text{ mm} \leq y_3 \leq 1\ 000\text{ mm}$, 其杆件几何参数同第 2.4 节所述; 采用 Matlab 软件编程求得其工作空间, 如图 6(a) 所示, 其不同 x 值的 $y-z$ 截面图如图 6(b) 所示。

4 机构动力学分析

本文采用虚功原理的序单开链法进行该机构动力学分析。其中, 各杆的运动学特性, 包括速度、角速度、角加速度和加速度, 均可依据刚体运动学的原理和方法^[20]进行计算, 限于篇幅, 此处不再赘述。



(a) 2T1R机构的工作空间

(b) 在不同x处的y-z截面图

图6 2T1R机构的工作空间

Fig. 6 Workspace of the 2T1R mechanism

4.1 受力分析

假设构件所承受的力仅限于重力载荷和惯性力, 而且仅受惯性应力的制约; 同时, 为简化运算, 将杆件上所受的外力(矩)转换为在质心上的合力向量 Q 。

4.1.1 第2回路上各杆件受力分析

1) 动平台

取动平台的质心为 E 点, 则

$$Q_E = \begin{bmatrix} F_E \\ M_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_p + m_p g - m_p a_p \\ \tau_p - {}^0I_p \varepsilon_p - \omega_p \times ({}^0I_p \omega_p) \end{bmatrix} \quad (17)$$

式中, f_p 与 τ_p 分别为动平台1所受的外力和外力矩; 0I_p 为动平台1质心处惯量矩阵; ω_p 、 ε_p 分别为动平台1的角速度和角加速度; g 为重力加速度; m_p 为动平台1的质量; a_p 为动平台1的加速度。以下计算式字符含义类似。

2) 移动滑块 A_3B_3

$$Q_{A_3B_3} = \begin{bmatrix} F_{A_3B_3} \\ M_{A_3B_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{A_3B_3} + m_{A_3B_3} g - m_{A_3B_3} a_{A_3B_3} \\ K \end{bmatrix} \quad (18)$$

式中, $K = [0 \ 0 \ 0]^T$ 。

3) 转动杆 B_3C_3

$$Q_{B_3C_3} = \begin{bmatrix} F_{B_3C_3} \\ M_{B_3C_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{B_3C_3} g - m_{B_3C_3} a_{B_3C_3} \\ -{}^0I_{B_3C_3} \varepsilon_{B_3C_3} - \omega_{B_3C_3} \times ({}^0I_{B_3C_3} \omega_{B_3C_3}) \end{bmatrix} \quad (19)$$

4) 移动杆 C_3D_3

$$Q_{C_3D_3} = \begin{bmatrix} F_{C_3D_3} \\ M_{C_3D_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{C_3D_3} g - m_{C_3D_3} a_{C_3D_3} \\ K \end{bmatrix} \quad (20)$$

5) 转动杆 D_3E_1

$$Q_{D_3E_1} = \begin{bmatrix} F_{D_3E_1} \\ M_{D_3E_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{D_3E_1} g - m_{D_3E_1} a_{D_3E_1} \\ -{}^0I_{D_3E_1} \varepsilon_{D_3E_1} - \omega_{D_3E_1} \times ({}^0I_{D_3E_1} \omega_{D_3E_1}) \end{bmatrix} \quad (21)$$

6) 转动杆 E_1O'

$$Q_{E_1O'} = \begin{bmatrix} F_{E_1O'} \\ M_{E_1O'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{E_1O'} g - m_{E_1O'} a_{E_1O'} \\ -{}^0I_{E_1O'} \varepsilon_{D_3E_1} - \omega_{E_1O'} \times ({}^0I_{E_1O'} \omega_{E_1O'}) \end{bmatrix} \quad (22)$$

4.1.2 第1回路上各杆件受力分析

1) 移动滑块 $A_iB_i (i=1, 2)$

$$Q_{A_iB_i} = \begin{bmatrix} F_{A_iB_i} \\ M_{A_iB_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{A_iB_i} + m_{A_iB_i} g - m_{A_iB_i} a_{A_iB_i} \\ K \end{bmatrix} \quad (23)$$

2) 转动杆件 $B_iC_i (i=1, 2)$

$$Q_{B_iC_i} = \begin{bmatrix} F_{B_iC_i} \\ M_{B_iC_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{B_iC_i} g - m_{B_iC_i} a_{B_iC_i} \\ -{}^0I_{B_iC_i} \varepsilon_{B_iC_i} - \omega_{B_iC_i} \times ({}^0I_{B_iC_i} \omega_{B_iC_i}) \end{bmatrix} \quad (24)$$

3) 杆件 C_1C_2

由于 C_1D_1 与 C_2D_1 同轴线, 不发生相对转动, 故将 C_1D_1 与 C_2D_1 视为同一杆件 C_1C_2 。

$$Q_{C_1C_2} = \begin{bmatrix} F_{C_1C_2} \\ M_{C_1C_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{C_1C_2} g - m_{C_1C_2} a_{C_1C_2} \\ K \end{bmatrix} \quad (25)$$

4.2 动力学分析

对于第2回路, 解除 O' 处的约束, 由虚功原理可得, 动力学方程为

$$\begin{aligned} & [\delta X_{A_3B_3} \ 0] Q_{A_3B_3} + [\delta X_{B_3C_3} \ \delta \theta_{B_3C_3}] Q_{B_3C_3} + \\ & [\delta X_{D_3E_1} \ \delta \theta_{D_3E_1}] Q_{D_3E_1} + \\ & [\delta X_{E_1O'} \ \delta \theta_{E_1O'}] Q_{E_1O'} - [\delta X_{C_1C_2} \ 0] Q_E = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

同理, 对于第1回路, 由虚功原理可得, 其动力学方程为

$$\begin{aligned} & [\delta X_{A_1B_1} \ 0] Q_{A_1B_1} + [\delta X_{B_1C_1} \ \delta \theta_{B_1C_1}] Q_{B_1C_1} + \\ & [\delta X_{A_2B_2} \ 0] Q_{A_2B_2} + [\delta X_{B_2C_2} \ \delta \theta_{B_2C_2}] Q_{B_2C_2} + \\ & [\delta X_{C_1C_2} \ 0] Q_E = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

式中, $\delta \theta$ 与 δX 分别为各杆件的转动虚位移与移动虚位移; $\delta X_{A_iB_i} = J_{vA_iB_i} \delta q (i=1, 2, 3)$; $\delta X_{B_iC_i} = J_{vB_iC_i} \delta q (i=1, 2, 3)$; $\delta X_{C_1C_2} = J_{vC_1C_2} \delta q$; $\delta X_{D_3E_1} = J_{vD_3E_1} \delta q$; $\delta X_{E_1O'} = J_{vE_1O'} \delta q$; $\delta \theta_{D_3E_1} = J_{\omega D_3E_1} \delta q$; $\delta \theta_{E_1O'} = J_{\omega E_1O'} \delta q$ 。其中, δq 为广义虚位移; J_v 为各杆件的速度雅可比矩阵; J_ω 为各杆件的角速度雅可比矩阵。

4.3 驱动力计算实例

并联机构的结构尺寸同第2.4节。

另取各杆件质量为: $m_{A_iB_i} = 4.5 \text{ kg}$, $m_{B_iC_i} = m_{B_2C_2} = 9 \text{ kg}$, $m_{B_3C_3} = 7 \text{ kg}$, $m_{C_1C_2} = 14 \text{ kg}$, $m_{D_3E_1} = 12 \text{ kg}$, $m_{E_1D_3} = 9 \text{ kg}$, $m_{C_3D_3} = 3.5 \text{ kg}$ 。机构负重初步设置为 15 kg 。

各杆件转动惯量如表2所示。

表2 各杆件的转动惯量

Tab. 2 Moment of the inertia of each rod

名称	转动惯量		
	$I_{xx}/(\text{kg}\cdot\text{mm}^2)$	$I_{yy}/(\text{kg}\cdot\text{mm}^2)$	$I_{zz}/(\text{kg}\cdot\text{mm}^2)$
动平台1	855 685.96	1 038 055.82	224 383.69
杆件 B_1C_1	686 006.00	834 717.24	976 289.27
杆件 B_2C_2	426 061.64	834 717.24	716 344.92
杆件 B_3C_3	56 810.98	312 662.18	256 072.93
杆件 C_1C_2	955 086.39	1 805 398.03	899 688.71
杆件 C_3D_3	62 305.01	117 560.76	67 509.81
杆件 E_1D_3	431 184.39	449 035.03	493 613.08

将上述参数代入式(17)~式(27)，忽略摩擦，运用 Matlab 软件计算得到机构的驱动力理论曲线，如图7(a)所示；同时，在 Adams 软件中模拟机构运动，得到机构的驱动力仿真曲线，如图7(b)所示。Matlab 软件理论计算所需的部分数据是直接测量 Adams 软件中的模型得到的，导致该机构的驱动力仿真曲线和理论结果不完全一致，存在微小的差异。

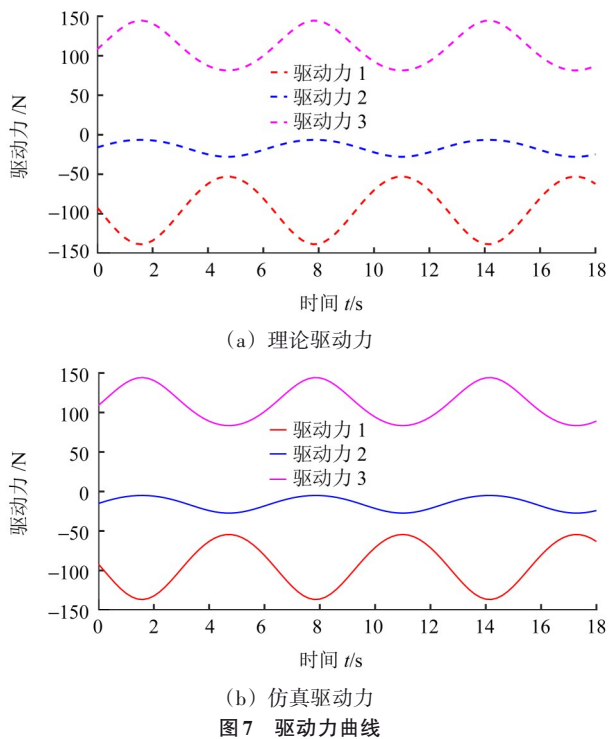


图7 驱动力曲线

由图7可知，3个驱动力变化较为平缓且3个滑块所需的最大值分别为136.8、27.4、144.2 N。这为驱动装置的选择提供了参考。

5 应用场景的概念设计

本文设计的3-DOF 2T1R机构除可应用于制造业中的装配、搬运和加工等工艺外^[21]，也可应用于室

内特定空间中的拍摄记录等工作，如图8所示。

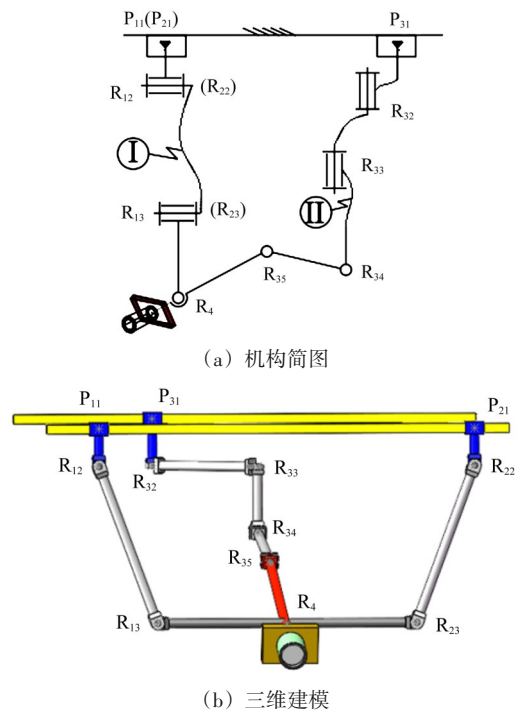


图8 移动摄影示意图

Fig. 8 Schematic diagram of the mobile photography

传统的拍照方式往往受限于固定的视角，只能获取到单一角度的相片，这无疑限制了对目标物品的全面反映。而移动拍摄技术可从多个角度、全方位地观察和反映目标物品。为此，可将摄像机固定于该并联机构的动平台上，利用动平台具有平移和旋转混合运动的优势，使得摄像机能够稳定地移动并调整拍摄角度。其具体工作原理如下：

机构的两根平行导轨固定在室内的支撑壁上，3个驱动副 P_{11} 、 P_{21} 、 P_{31} 在导轨上平移，确保照相机在水平、垂直方向上实现精确的稳定移动，从而捕捉到目标物品在不同位置上的细节；而动平台的转动则允许照相机在一较大的角度内进行旋转，以获取多角度、全面的照片。这不仅提高了照片的质量和清晰度，更重要的是提供了更多关于目标物品的信息，例如，物品的结构、纹理、颜色等特征，可为后续的研究工作提供有力支持。

移动摄影装置要实现完全仰视到完全俯视的拍摄，其转角范围为 $-90^\circ \sim +90^\circ$ 或更大。但本文的机构是在室内特定空间工作，镜头只需向下俯倾，定义俯角为正，此时，姿态角只需达到 60° 左右即可，其摄影机镜头也有一定的调节作用，可做姿态角的补偿。该机构可通过优化杆长参数来调节姿态角的转动范围。优化后的工作空间如图9所示，其姿态角转动幅度足够大，最大可达 70° ，满足上述照相机大角度转动的需求。

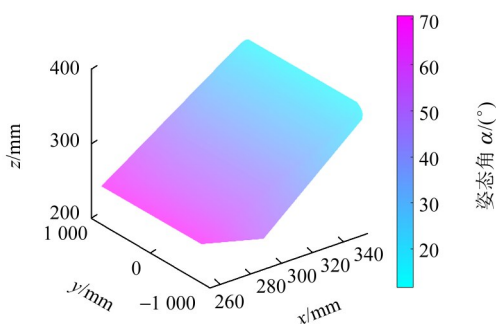


图9 优化后的工作空间

Fig. 9 Optimized workspace

6 结论

3自由度并联机构中具有平移和旋转输出特性的1T2R和2T1R机构各具特色。1T2R机构常用于加工制造,但衍生运动多、运动学求解困难、不易解耦^[22-23];而2T1R机构能实现更多操作,如工位更换、物料分类,无衍生运动且易运动解耦。尽管1T2R机构因对称性好、易模块化而得到广泛研究,但2T1R机构的应用潜力使其同样受到广泛关注。

本文设计了一种新型纯低副构成的2T1R并联机构,并对其进行了拓扑分析、运动学和动力学分析。其中,自由度计算采用了新计算表达式,即基于最短回路的一般过约束和无过约束的并联机构的非瞬时自由度计算式^{[19]40-52}。

分析结果表明,该机构有以下优点:

1) 结构简单,由纯低副组成,制造成本低,便于装配。

2) 凭借其独特的结构展现了较优的部分运动解耦性和动力学性能,并且位置正反解均为符号解,为机构的后续研发与实际应用带来了便利。

3) 3个移动驱动副同速同向运动时,理论上具有无限大的操作空间;其在不同速不同向的局部运动时,能够实现小范围精确的灵活运动。

4) 可用于制造业中的装配、物料分类和加工等工艺,也可用于实验室移动摄像技术装备。

参 考 文 献

- [1] GOGU G. Maximally regular T2R1-type parallel manipulators with bifurcated spatial motion[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2011, 3: 011010.
- [2] FAN C X, LIU H Z, ZHANG Y B. Type synthesis of 2T2R, 1T2R and 2R parallel mechanisms[J]. Mechanism and Machine Theory, 2013, 61: 184-190.
- [3] 李秦川,柴馨雪,陈巧红. 两转一移三自由度并联机构研究进展[J]. 科学通报, 2017, 62(14): 1507-1519.
- LI Qinchuan, CHAI Xinxue, CHEN Qiaohong. Review on 2R1T 3-DOF parallel mechanisms[J]. Chinese Science Bulletin, 2017, 62(14): 1507-1519.
- [4] SONG Y M, HAN P P, WANG P F. Type synthesis of 1T2R and 2R1T parallel mechanisms employing conformal geometric algebra[J]. Mechanism and Machine Theory, 2018, 121: 475-486.
- [5] 许允斗,胡建华,张东胜,等. 一种所有转轴均连续的五自由度混联机器人机构[J]. 机械工程学报, 2018, 54(21): 19-24.
- XU Yundou, HU Jianhua, ZHANG Dongsheng, et al. A kind of five degrees of freedom hybrid robot with all rotating shafts continuous[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(21): 19-24.
- [6] KONG X W, GOSSELIN C M. Generation and forward displacement analysis of RP_R-PR-RP_R analytic planar parallel manipulators[J]. Journal of Mechanical Design, 2002, 124(2): 294-300.
- [7] LI B, CHEN Y, DENG Z Q, et al. Conceptual design and analysis of the 2T1R mechanism for a cooking robot[J]. Robotics and Autonomous Systems, 2011, 59(2): 74-83.
- [8] XIE F G, LIU X J, YOU Z, et al. Type synthesis of 2T1R-type parallel kinematic mechanisms and the application in manufacturing[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2014, 30(1): 1-10.
- [9] NI Y B, WU N, ZHONG X Y, et al. Dimensional synthesis of a 3-DOF parallel manipulator with full circle rotation[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2015, 28(4): 830-840.
- [10] XU Y D, ZHANG D S, YAO J T, et al. Type synthesis of the 2R1T parallel mechanism with two continuous rotational axes and study on the principle of its motion decoupling[J]. Mechanism and Machine Theory, 2017, 108: 27-40.
- [11] 林浩,石志新,罗玉峰,等. 可用于铺盘调节的2T1R并联机构的综合与运动学分析[J]. 机械传动, 2022, 46(5): 48-52.
- LIN Hao, SHI Zhixin, LUO Yufeng, et al. Synthesis and kinematics analysis of a 2T1R parallel mechanism that can be used for spreading tray adjustment[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2022, 46(5): 48-52.
- [12] NOSOVA N Y. A review of the parallel structure mechanisms with kinematic decoupling[C]// Advanced Technologies in Robotics and Intelligent Systems. Cham: Springer International Publishing, 2020: 247-255.
- [13] 沈惠平. 机器人机构拓扑特征运动学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2021: 98-104.
- SHEN Huiping. Topological characteristics-based kinematics for robotic mechanisms[M]. Beijing: Higher Education Press, 2021: 98-104.
- [14] 杨廷力,刘安心,罗玉峰,等. 机器人机构拓扑结构设计[M]. 北京: 科学出版社, 2012: 77-80.
- YANG Tingli, LIU Anxin, LUO Yufeng, et al. Theory and application of robot mechanism topology[M]. Beijing: Science Press, 2012: 77-80.

- [15] 杨廷力,刘安心,罗玉峰,等. 机器人机构结构综合方法的基本思想、特点及其发展趋势[J]. 机械工程学报,2010,46(9):1-11.
YANG Tingli, LIU Anxin, LUO Yufeng, et al. Basic principles, main characteristics and development tendency of methods for robot mechanism structure synthesis[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46(9): 1-11.
- [16] 邓嘉鸣,许可,赵迎春,等. 无寄生运动非对称空间2T1R并联机构设计与运动学分析[J]. 农业机械学报,2018,49(6):408-417.
DENG Jiaming, XU Ke, ZHAO Yingchun, et al. Design and kinematics analysis of asymmetric 2T1R-type spatial parallel mechanism without parasitic motion [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2018, 49(6): 408-417.
- [17] 高征,肖金壮,王洪瑞,等. 一种三自由度串并联结构旋转台的动力学分析[J]. 中国机械工程,2012,23(1):18-21.
GAO Zheng, XIAO Jinzhuang, WANG Hongrui, et al. Dynamics analysis on a 3-DOF rotational platform with serial-parallel structure[J]. China Mechanical Engineering, 2012, 23(1): 18-21.
- [18] DE JALÓN J G, SERNA M A, AVILÉS R. Computer method for kinematic analysis of lower-pair mechanisms—I velocities and accelerations [J]. Mechanism and Machine Theory, 1981, 16 (5) : 543-556.
- [19] 沈惠平,李菊,朱小蓉,等. 基于最优路径的并联机构自由度计算方法及其新公式[J]. 机械工程学报,2024,60(19):40-52.
SHEN Huiping, LI Ju, ZHU Xiaorong, et al. New method and formula for degree-of-freedom calculation of parallel mechanism based on optimal paths [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2024, 60(19): 40-52.
- [20] 杜中秋,沈惠平,李菊,等. 一种位置正解符号化且运动部分解耦的新型2T1R并联机构动力学分析[J]. 机电工程,2023,40(8):1231-1239.
DU Zhongqiu, SHEN Huiping, LI Ju, et al. Dynamics analysis of a new 2T1R parallel mechanism with symbolic position solutions and partially motion decoupled [J]. Journal of Mechanical & Electrical Engineering, 2023, 40(8): 1231-1239.
- [21] 张宾,丁睿哲,上官林建,等. 移动并联加工机器人仿真研究[J]. 机械工程学报,2022,58(14):146-153.
ZHANG Bin, DING Ruizhe, SHANGGUAN Linjian, et al. Simulation study of mobile parallel machining robot [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2022, 58(14): 146-153.
- [22] XU Y D, ZHAO Y, YUE Y, et al. Type synthesis of overconstrained 2R1T parallel mechanisms with the fewest kinematic joints based on the ultimate constraint wrenches [J]. Mechanism and Machine Theory, 2020, 147: 103766.
- [23] QI Y, WANG Y, WANG H. Multi-objective optimization of 1T2R parallel mechanisms without fixed orientation center and axis under the influence of parameter perturbation [J]. IEEE Access, 2023, 11: 34958-34967.

Topological design and analysis of a novel 2T1R parallel mechanism with symbolic position solutions and motion decoupling

GUO Yue LI Ju SHEN Huiping

(Research Center of Advanced Mechanism Theory, Changzhou University, Changzhou 213164, China)

Abstract: [Objective] The two-translation-one-rotation (2T1R) parallel mechanism shows good engineering application potential due to its simple structure and low cost, but the current research on new 2T1R mechanism configurations lags behind, contrasting sharply with the research enthusiasm for 1T2R mechanisms. To fill the research gap of 2T1R parallel mechanisms, a pure lower-pair constructed 2T1R parallel mechanism was designed based on the theory of position and orientation characteristic (POC) set to meet the diversified requirements of engineering applications for mechanism performance. [Methods] Firstly, the topological structure of the mechanism was systematically analyzed using topological analysis methods, and key topological features were extracted. Then, a kinematic model was constructed based on topological features, and symbolic forward and inverse position solutions of the mechanism were derived, followed by solving the velocity and acceleration of the moving platform. On this basis, the geometric parameters of the workspace and singular configurations of the mechanism were determined through theoretical analysis. The driving force variation law of the mechanism was solved by means of dynamic modeling. Finally, the conceptual design of the mechanism was completed in combination with practical application scenarios. [Results] The study shows that the pure lower-pair 2T1R parallel mechanism not only has the characteristic of symbolic forward position solution, but also can realize partial motion decoupling with excellent dynamic performance. Meanwhile, its advantages of low cost and large operation space are significant, providing reference and practical guidance for subsequent mechanism optimization design and engineering application.

Key words: Parallel mechanism; Topological analysis; Workspace; Dynamics